Pokud byste chtěli řešit (možná) trošku těžší (a tedy asi i „hezčí“) příklady, tak zde si můžete vybrat náhradníky:

1*. Najděte definiční obor a načrtněte graf funkce $f(x)=\sqrt{1-\ln x^2+\ln^2 x}$.

2*. Najděte definiční obor funkce $f(x)=\sqrt{\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$.

3*. Jsou dány množiny $A\subset R, B\subset R$: $A=\{a\in R; |a-1|<2\}$ a $B=\{b\in R; |b+2|\geq 2\}$.
Najděte množiny $A\cup B; A\cap B; A\setminus B; B\setminus A; A\times B$ (a pokuste se množinu $A\times B$ načrtnout jako podmnožinu roviny).

5*. V oboru reálných čísel řešte nerovnici $\frac{\ln|x|}{4-x^2}\geq 0$.

6**. Najděte největší interval, na kterém je k funkce

$$f(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$

rostoucí (a tedy prostá) . Na tomto intervalu najděte k funkci f inversní funkci . (Můžete se i pokusit načrtnout grafy f a f^{-1}.)

7*. Načrtněte grafy funkcí

$$f(x)=\left|\frac{x+1}{x-2}\right|, \quad g(x)=-\left|\ln|x|\right| \text{ nebo } g(x)=\ln(|x|+1)\ ; \quad h(x)=e^{-|x|}\ .$$

Pokud existují průsečíky grafu s osami, popište je.

Nebo, chcete-li, pokuste se odhadnout grafy funkcí

$$f(x)=\frac{1}{x^2+1} \quad \text{a} \quad g(x)=\frac{1}{x^2-1}\ ,$$

a porovnat je s grafy funkcí

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)^2} \quad \text{a} \quad g(x)=\frac{1}{(x-1)^2}\ .$$

10**. Najděte bod paraboly $y^2=2x$, který je nejblíže bodu $A[1,4]$.

---

rozhodnúci

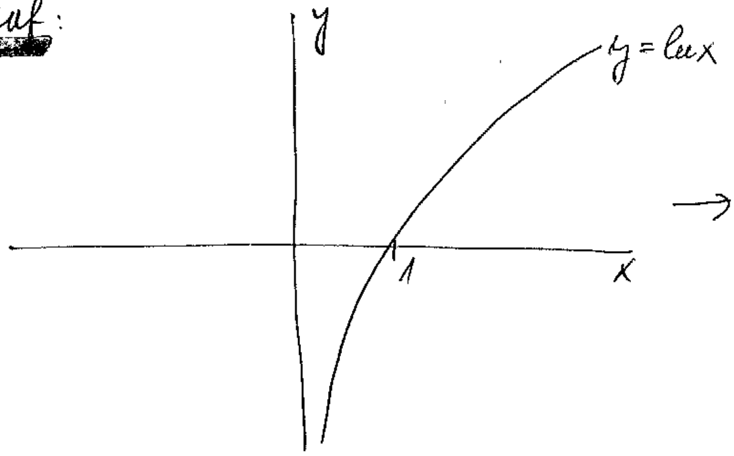
(1*) $f(x) = \sqrt{1 - \ln x^2 + \ln^2 x}$

$\mathcal{D}f = (0, +\infty)$,

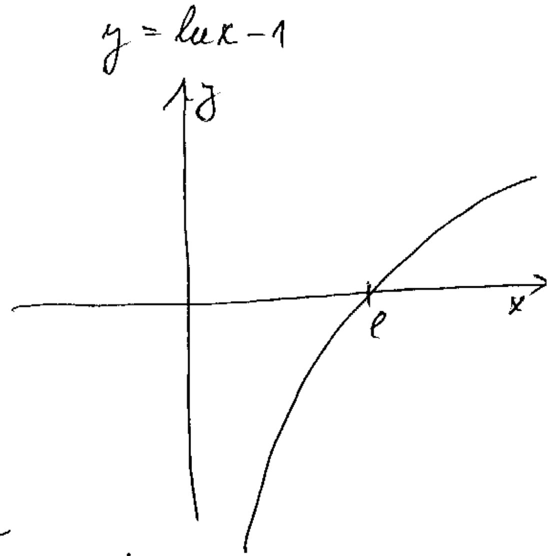
$f(x) = \sqrt{1 - 2\ln x + \ln^2 x} = \sqrt{(1-\ln x)^2} = |\ln x - 1|$

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

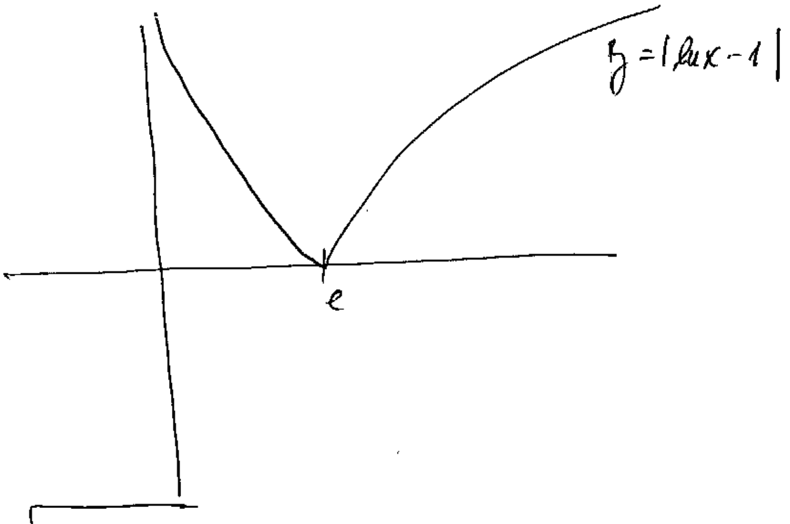
graf:



$\rightarrow$



$\rightarrow$



(2*) $f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)}$;

$\mathcal{D}f = \{x \in R;\ \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \geq 0\} = \{x \in R;\ \frac{x-1}{x+1} \geq 1\} = (-\infty, -1)$

$\frac{x-1}{x+1} - 1 \geq 0$ a $x \neq -1$

$\frac{\cancel{x} - 1 - \cancel{x} - 1}{x+1} \geq 0$

$\Leftrightarrow$ ~~x+1...~~

$x + 1 < 0 \Leftrightarrow x < -1$

(3*) $A = \{a \in R;\ |a-1| < 2\} = (-1,3)$

$B = \{b \in R;\ |b+2| \geq 2\} = (-\infty,-4\rangle \cup \langle 0,+\infty)$

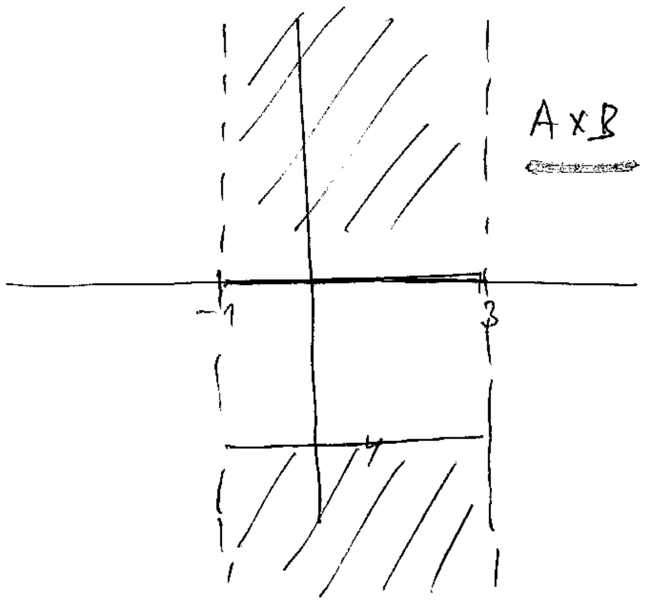
Řešení:

$A \cup B = (-\infty,-4\rangle \cup (-1,+\infty)$

$A \cap B = \langle 0,3)$

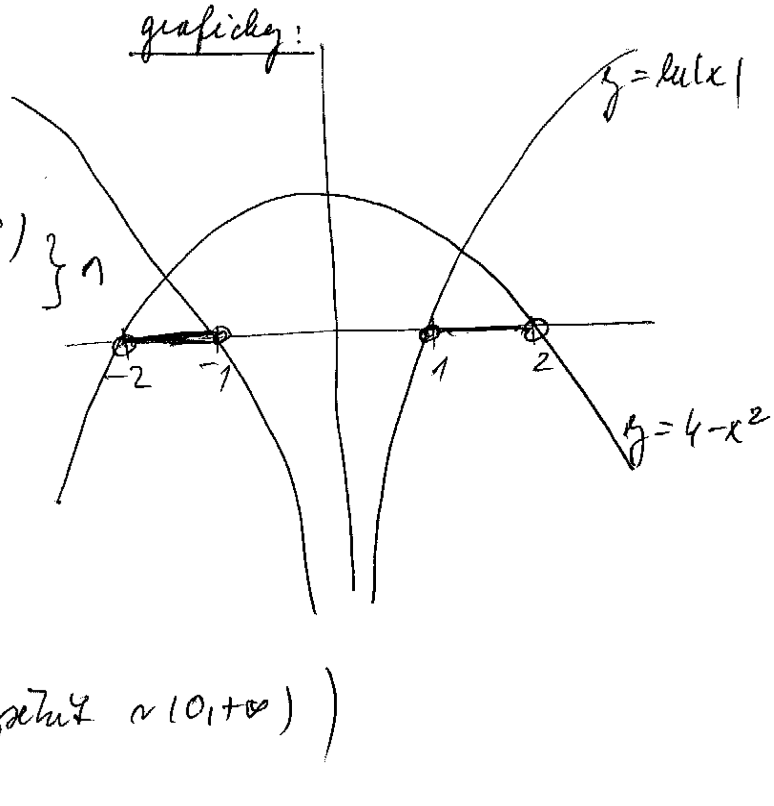
$A \setminus B = (-1,0)$, $B \setminus A = (-\infty,-4\rangle \cup \langle 3,+\infty)$

$A \times B = \{(a,b);\ a \in (-1,3) \wedge b \in (-\infty,-4\rangle \cup \langle 0,+\infty)\}$



(5*) $\frac{\ln|x|}{4-x^2} \geq 0$ $x \neq 0$

graficky:



$\left.\begin{array}{l}\ln|x| \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,-1\rangle \cup \langle 1,+\infty) \\ \wedge\ 4-x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-2,2)\end{array}\right\} \cap$

$\Leftrightarrow x \in (-2,-1\rangle \cup \langle 1,2)$

nebo $\ln|x| \leq 0 \wedge 4-x^2 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \langle -1,0) \cup (0,1\rangle \wedge x \in (-\infty,-2) \cup (2,+\infty)$

nemá řeš. $\emptyset$

(nebo: $\frac{\ln|x|}{4-x^2}$ je sudá fce a řešit v $(0,+\infty)$)

6**. $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

$\mathcal{D}f = \mathbb{R}$, (f je rastúca v R, lebo e^x je rast., e^{-x} klesá a teda $-e^{-x}$ rastúca, súčet rastúcich je rast., $\frac{1}{2}$ rast. fce je rastúca), preto ku nej, teda ex. inverzná fce, môžeme „ju" počítať f^{-1}:

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y \iff e^x - e^{-x} - 2y = 0$$

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0 \qquad e^x = t \text{ (subst.)}$$

$$t^2 - 2yt - 1 = 0 \qquad D = 4y^2 + 4 > 0 \quad \forall y$$

$$(\text{t.j. } \mathcal{H}f = \mathbb{R}?)$$

$$t_{1,2} = \frac{2y \pm \sqrt{4y^2+4}}{2}$$

$$t_{1,2} = y \pm \sqrt{y^2+1}, \quad \text{ale } t > 0, \text{ t.j.}$$

$$(\text{a } y - \sqrt{y^2+1} < 0 \ \forall y \in \mathbb{R})$$

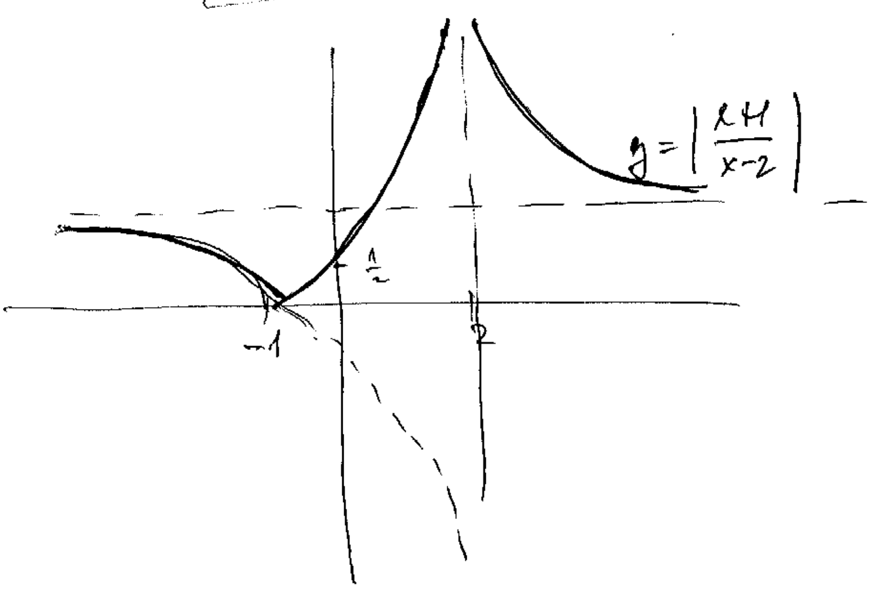
$$e^x = y + \sqrt{y^2+1}$$

$$x = \ln(y + \sqrt{y^2+1}) \quad \text{a potom } x \leftrightarrow y, \text{ tak}$$

$$f^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), \quad \mathcal{D}f^{-1} = \mathbb{R}, \quad \mathcal{H}f^{-1} = \mathbb{R}$$

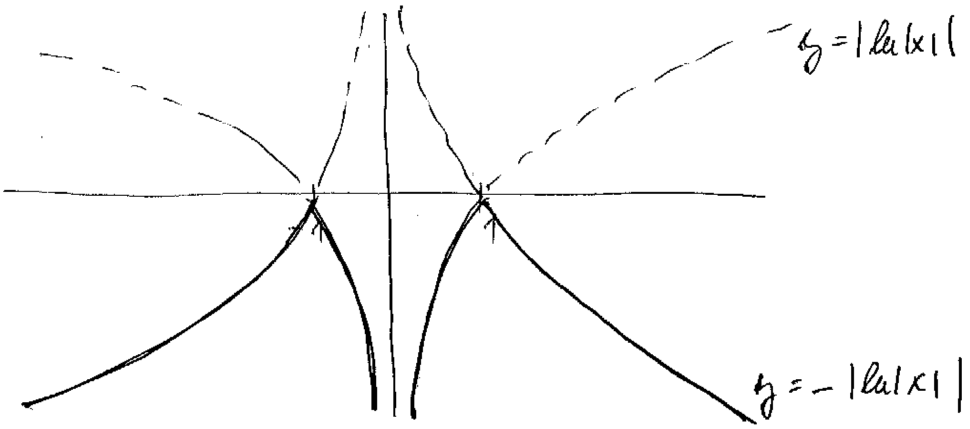
7**. $f(x) = \left| \dfrac{x+1}{x-2} \right| = \left| 1 + \dfrac{3}{x-2} \right|$, $\mathcal{D}f = \mathbb{R} - \{2\}$, $f(x) = 0 \iff x = -1$

$\mathcal{H}f = \langle 0, 1) \cup (1, +\infty)$, $f(0) = \frac{1}{2}$



$g(x) = -\,|\ln|x||$ $\quad D_f = \mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, fce sudá!, nekladná!

$g(x) = 0 \Leftrightarrow \ln|x| = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$

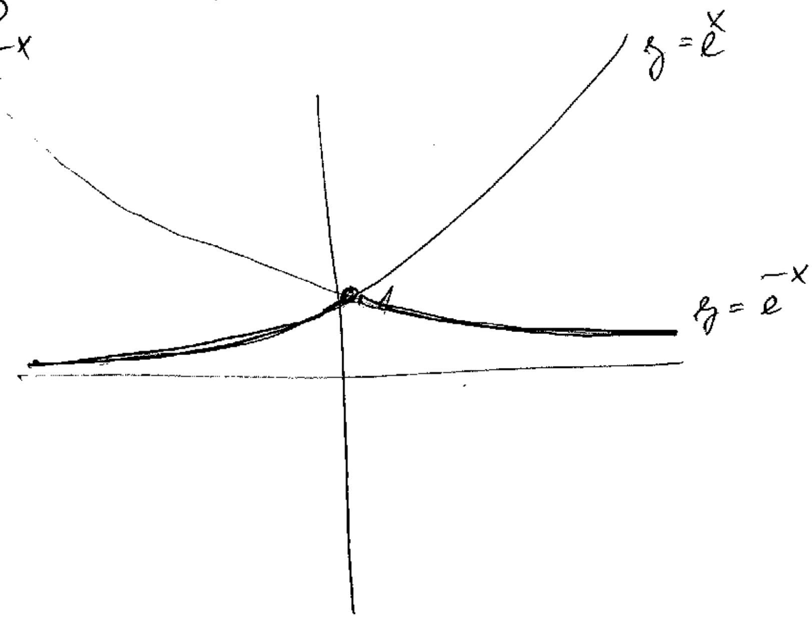


$h(x) = e^{-|x|}$ $\quad D_f = \mathbb{R}$, $f(x) > 0$, $-|x| \leq 0 \Rightarrow h(x) \leq 1$, fce sudá!

$f(0) = 1$

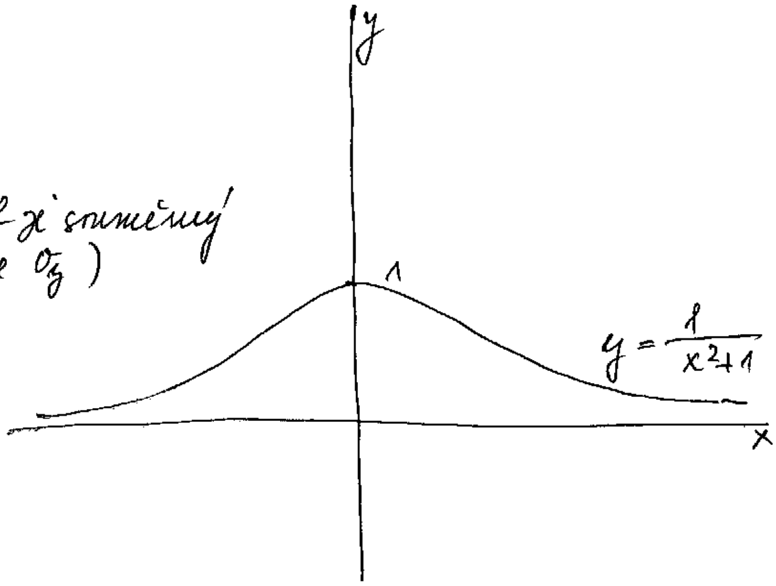
pro $x \geq 0$

$h(x) = e^{-x}$



$$f(x) = \frac{1}{x^2+1}$$:

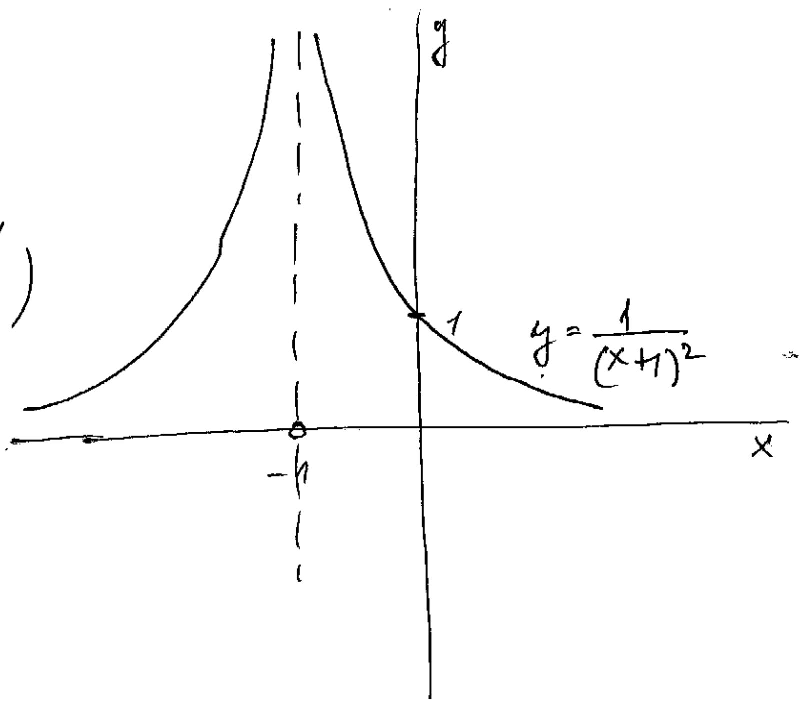
$D_f = R$, $f(x)$ – sudá funkce (graf je souměrný dle O_y)
$f(x) > 0$ v D_f,
$f(0) = 1$, pro $x \neq 0$ je $f(x) < 1$
f je klesající v $\langle 0, +\infty)$,
pro x „velká" je $f(x)$ „malé"
$\left(\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2+1} = 0 \right)$



ale

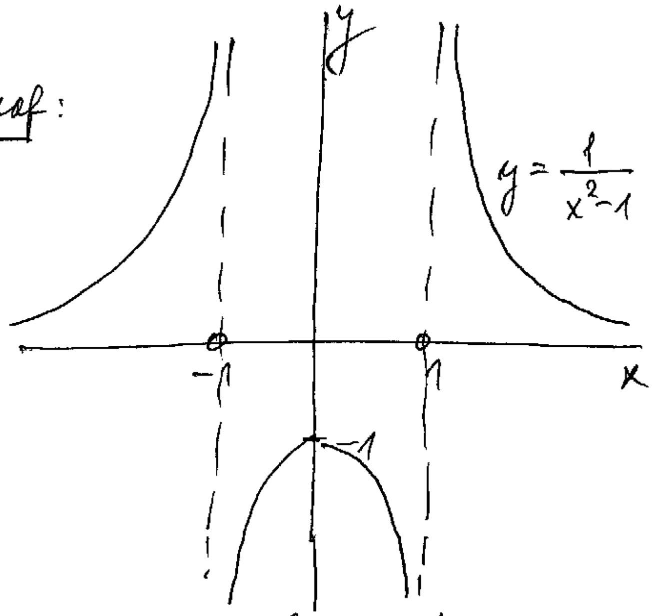
$$f(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

(má graf, který je „posunutý" graf funkce $y = \frac{1}{x^2}$)
$D_f = R \setminus \{-1\}$,
$f(0) = 1$, $f(x) > 0$ v D_f



$g(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$

graf:



$D_g = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$

g – sudá funkce

$g(x) > 0$ v $(-\infty,-1) \cup (1,+\infty)$

$g(x) < 0$ v $(-1,1)$

$(g(x) \neq 0)$ $g(0) = -1$

pro x „blízko" $x=1$, $x>1$ je $g(x)$ „velké" kladné $\left(\lim\limits_{x\to 1+} \dfrac{1}{x^2-1} = +\infty\right)$

pro x „blízko" $x=1$, $x<1$ je $g(x)$ „velké" záporné $\left(\lim\limits_{x\to 1-} \dfrac{1}{x^2-1} = -\infty\right)$

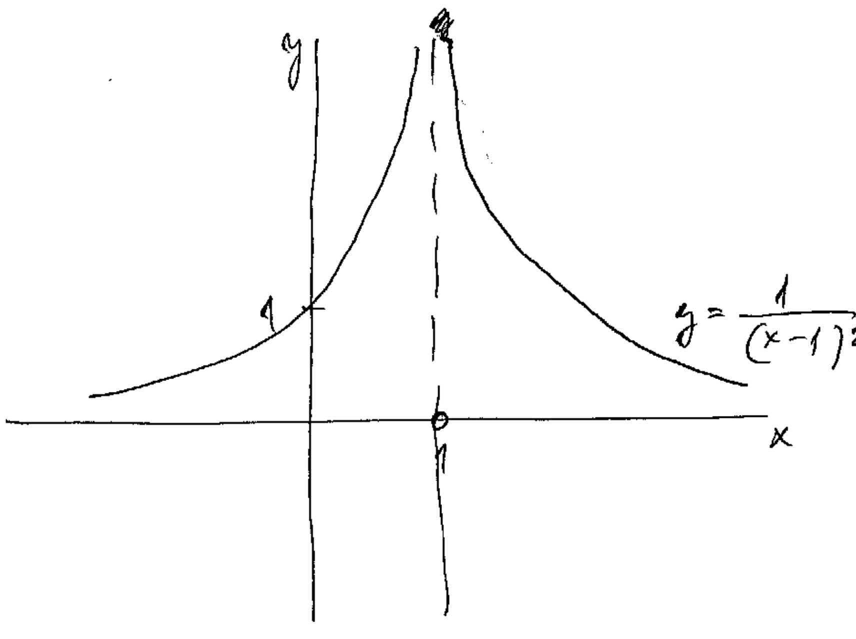
pro x „velká" kladná (i záporná) je $g(x) = \dfrac{1}{x^2-1}$ blízko nuly $\left(\lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{1}{x^2-1} = 0\right)$

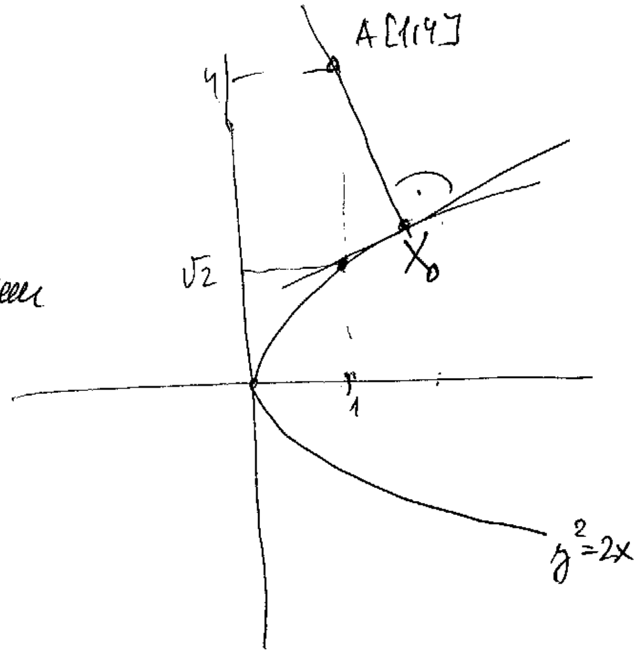
$g(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$ – jednoduché, opět „posunutý" graf funkce „$y = \dfrac{1}{x^2}$" (do bodu $x=1$)

$D_g = R - \{1\}$,

v D_g: $f(x) > 0$, $f(0) = 1$

$(f(x) \neq 0)$





10** $\quad y^2 = 2x \qquad A[1,4]$

~~X0~~ ~~X0 bude~~ $X_0[x_0,y_0]$ bude nejbližším bodem

$\Longleftrightarrow$ $X_0A \perp$ tečně k parabole v bodě $X_0[x_0,y_0]$,

tečna v X_0: (τ_0) $\quad y\,y_0 = x + x_0$

j. $\boxed{x - y_0 y + x_0 = 0}$

$\vec{n}_{\tau_0} = (1, -y_0)$

v bodě x_0 „musí“ být $\lambda \vec{n}_{\tau_0} = (X_0 - A)$

j. $\lambda(1, -y_0) = (x_0 - 1, y_0 - 4)$

na parabole: $x_0 = \frac{y_0^2}{2}$, j. $\lambda = \frac{y_0^2}{2} - 1$

a $-\lambda y_0 = y_0 - 4$,

j. $\left(-\frac{y_0^2}{2} + 1\right) y_0 = y_0 - 4$, j.

$-\frac{y_0^3}{2} = -4 \Rightarrow$ $\underline{y_0 = 2, \text{ a tak } x_0 = 2}$

nebo: (užitím dif. počtu) – nejbližší bod bude pro část $y \geq 0$,

j. $y = \sqrt{2x}$, tečna v bodě (x_0, y_0): $y = y_0 + g'(x_0)(x - x_0)$

označení $g(x) = \sqrt{2x}$

$\underline{x_0 > 0}$ $\quad g'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{2x_0}} \cdot 2 = \frac{1}{\sqrt{2x_0}}$, j. $y = y_0 + \frac{1}{\sqrt{2x_0}} \cdot (x - x_0)$

$x_0 = \frac{y_0^2}{2}$, $y_0 > 0$ $\qquad y = y_0 + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \frac{y_0^2}{2}}} \cdot \left(x - \frac{y_0^2}{2}\right)$,

j. $y_0 y - y_0^2 = \left(x - \frac{y_0^2}{2}\right)$

$\underline{x - y_0 y + x_0 = 0}$

v $X_0[x_0,y_0]$ rovnice tečny x

dále „stejné“